# Una cota elemental para los convergentes de una fracción continua

por

**Ada Lovelace**

Resumen. Revisamos una estimación clásica sobre la velocidad de convergencia de los convergentes de una fracción continua hacia un número irracional, dando una demostración elemental y breve, junto con un ejemplo numérico. El argumento usa únicamente la recurrencia de los convergentes y desigualdades elementales.

## 1. Introducción

Sea $\alpha$ un número irracional con desarrollo en fracción continua $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ y convergentes $p_n/q_n$. Es un resultado clásico que

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}},$$

y el objetivo de esta nota es dar una demostración corta y autocontenida de este hecho, junto con una ilustración numérica.

## 2. La recurrencia de los convergentes

Recordemos las recurrencias habituales

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \qquad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2},$$

con $p_{-1} = 1$, $p_{-2} = 0$, $q_{-1} = 0$, $q_{-2} = 1$. La Tabla 1 recoge los primeros convergentes de $\alpha = \sqrt{2}$.

## 3. Una cota elemental

Proposición. *Para todo $n \geq 0$,*

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Cuadro 1: Primeros convergentes de $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots]$.

| $n$ | $p_n$ | $q_n$ | $p_n/q_n$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1,000000 |
| 1 | 3 | 2 | 1,500000 |
| 2 | 7 | 5 | 1,400000 |
| 3 | 17 | 12 | 1,416667 |
| 4 | 41 | 29 | 1,413793 |

DEMOSTRACIÓN. Como $\alpha$ está entre dos convergentes consecutivos $p_n/q_n$ y $p_{n+1}/q_{n+1}$, se tiene

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{|p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1}|}{q_n q_{n+1}} = \frac{1}{q_n q_{n+1}},$$

donde la última igualdad es la identidad estándar $p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$, que se demuestra por inducción directamente a partir de la recurrencia anterior. □

## 4. Ilustración numérica

Usando la Tabla 1, la cota para $n = 3$ da $|\sqrt{2} - 17/12| < 1/(12 \cdot 29) \approx 0{,}00287$; el error real es de aproximadamente 0,00245, holgadamente dentro de la cota.

## 5. Conclusión

El argumento elemental anterior recupera la cota clásica de los convergentes sin recurrir a la teoría de las mejores aproximaciones, y la cota resulta útil numéricamente incluso para $n$ pequeño.

## Referencias

[1] A. Ya. Khinchin, *Continued Fractions*, University of Chicago Press, 1964.

[2] G. H. Hardy y E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 6.ª ed., Oxford University Press, 2008.